

# **Introduction à la didactique de la géométrie - Géométrie plane**

## **Objectifs**

### **I - Pourquoi faire de la géométrie à l'école ?**

### **II - Explicitation de quelques concepts**

- A. Les savoirs géométriques
  - 1. *Dessins, figures et représentations*
  - 2. *Les constituants des savoirs géométriques*
- B. Les grands types de géométrie
  - 1. *Trois grandes catégories de géométrie dans l'enseignement primaire et secondaire*
  - 2. *En résumé : Quelle géométrie pour quel niveau ?*
- C. Géométrie et espace
  - 1. *D'un espace physique à un espace représenté*
  - 2. *Différents espaces*
  - 3. *S'appuyer sur les espaces pour construire un savoir géométrique*

### **III - La géométrie à l'école**

- A. La géométrie dans les programmes
  - 1. *La géométrie en cycle 1*
  - 2. *La géométrie en cycle 2*
  - 3. *La géométrie en cycle 3*
- B. Les grands types d'activité géométrique à l'école
  - 1. *5 grands types d'activités*
  - 2. *Reconnaître*
  - 3. *Décrire*
  - 4. *Reproduire*
  - 5. *Construire*
  - 6. *Transformer*
- C. Les problèmes géométriques à l'école
  - 1. *Une proposition de typologie*

### **IV - Quelques éléments d'analyse**

- A. Les principales difficultés des élèves
  - 1. *Difficultés liées aux connaissances spatiales*
  - 2. *Difficultés liées aux représentations des objets géométriques*
  - 3. *Difficultés liées aux tâches de reproduction, représentation et construction de figures géométriques*
  - 4. *Difficultés liées aux descriptions de figures*
  - 5. *En complément : difficultés particulières associées à la symétrie axiale*
- B. Variables didactiques
  - 1. *La question des variables didactiques*

## **Objectifs**

- Connaître quelques concepts liés à la didactique des mathématiques.
- Lier les programmes et les savoirs et compétences géométriques attendues à l'école.
- Connaître la place de la résolution de problèmes en géométrie.
- Employer des outils pour analyser une séance ou des productions d'élèves.

## **Pourquoi faire de la géométrie à l'école ?**

A l'école primaire la géométrie est la modélisation de l'espace.

L'intérêt de ce domaine pour les élèves est multiple:

- La géométrie constitue un outil pour répondre à des problèmes de l'espace physique, posés dans le cadre de pratiques sociales, culturelles et plus tard professionnelles
- La géométrie établit des « ponts » entre plusieurs disciplines: mathématiques, géographie, EPS, arts plastiques...
- La géométrie est un lieu privilégié de l'initiation au raisonnement (expliquer, justifier, démontrer).
- La géométrie permet de donner à chaque élève une culture géométrique, c'est-à-dire un ensemble de résultats généraux :
  - le vocabulaire
  - des propriétés d'objets géométriques
  - des procédés de construction
  - des théorèmes

Cela implique la création d'un langage géométrique.

## Explicitation de quelques concepts

La géométrie, en soi est une **modélisation**

Il s'agit de passer du monde environnant à un monde « géométrique ».

À l'école primaire, elle reste très imbriquée au monde sensible dans lequel l'élève évolue

- Les premières expériences sont dans le monde sensible (ce sont les « *connaissances spatiales* »).

- Leurs descriptions, le vocabulaire employé participent à l'entrée dans un « *savoir géométrique* ».

L'école propose des activités qui favorisent le passage de la forme dessinée (objet de réalité) à l'évocation d'une figure (objet de pensée)

## A. Les savoirs géométriques

### 1. Dessins, figures et représentations

#### *Fondamental*

---

On distingue deux types d'objets : ceux de l'espace sensible, et les objets idéaux, ou géométriques.

#### *Dessin*

---

C'est la trace laissée par un outil dans un espace graphique :

*exemple : tracé sur le papier au crayon avec ou sans l'aide d'instrument, l'écran de l'ordinateur avec un logiciel de géométrie dynamique*

#### *Figure*

---

C'est un objet de la géométrie euclidienne. Il s'agit forcément d'un objet idéal, d'une construction de l'esprit.

Elle est décrite par un texte, une formulation, des propriétés.

#### *Représentation*

---

Il n'est pas possible qu'un tracé ou une maquette puisse être l'objet géométrique, la figure. Il est la "représentation" de celui-ci.

*Exemple : le tracé d'un carré sur une feuille, même réalisé à l'aide d'outils géométriques ne peut correspondre parfaitement à la figure du carré, il n'est que sa représentation.*

## 2. Les constituants des savoirs géométriques

Les savoirs géométriques peuvent être classés en trois catégories :

### Les objets géométriques

Ceux -ci peuvent être **matériels** ( et donc reliables au monde sensible comme par exemple le rectangle),  
ou **théoriques** (droite, point).

### Les relations (liens entre les objets)

- L'appartenance, le parallélisme, l'orthogonalité,
- L'égalité des longueurs,
- Le repérage,
- L'isométrie et la similitude.

### Les propriétés

Ce sont les liens entre objets et relations. Il peut s'agir de **propriétés d'objets** (exemple: le cube a 8 sommets) ou de **théorèmes** (exemple: si deux droites sont parallèles , toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre)

## B. Les grands types de géométrie

### 1. Trois grandes catégories de géométrie dans l'enseignement primaire et secondaire

#### Géométrie perceptive (on utilise les sens)

C'est une géométrie qui commence en maternelle et qui se poursuit.

Exemple : La reconnaissance perceptive d'une figure : "Cela a la forme d'un carré."

On s'interroge sur ce que l'on voit, mais on n'a pas (ou on n'utilise pas) de moyen argumenté de vérification

#### Remarque

Il y a déjà une première entrée dans l'abstraction, puisqu'on généralise un objet particulier par ses propriétés visuelles

( ex: la boîte a la forme d'un carré ...)

#### Géométrie instrumentée (on utilise des instruments)

C'est la majeure partie de la géométrie pratiquée au cycle 3.

La reconnaissance d'une figure ou de ses propriétés, se fait avec les instruments.

#### Remarque

On passe de l'objet réel vers un objet géométrique idéal, par l'usage des instruments qui matérialisent une propriété.

Ex : le compas qui va marquer une distance identique pour tous les points du cercle.

### Géométrie axiomatique (déductive)

---

Dans la géométrie axiomatique ou déductive, un objet géométrique est défini uniquement par ses propriétés. La géométrie déductive s'appuie sur des axiomes ou des théorèmes. Elle n'est pas implicitement travaillée à l'école primaire mais est présente indirectement lorsque l'on s'appuie sur des propriétés pour reconnaître une figure.

*ex : Ce quadrilatère est un losange parce que l'on a prouvé que ses diagonales se coupent en leur milieu.*

### Remarque

---

**axiome** : principe admis au départ. « Par un point situé sur une droite il ne passe qu'une seule perpendiculaire à cette droite. »

**théorème** : élaboration d'une théorie qui utilise les axiomes.

## **2. En résumé : Quelle géométrie pour quel niveau ?**

### Cycle 1 et cycle 2

---

- Géométrie de la perception
- "Est vrai ce que je vois."
- Boîte à outils géométrique : **l'œil**

### Fin du cycle 2 et cycle 3

---

- Géométrie instrumentée
- "Sont vraies les propriétés que je contrôle à l'aide des instruments."
- Boîte à outils géométrique : **instruments**

### Collège (et indirectement fin du cycle 3)

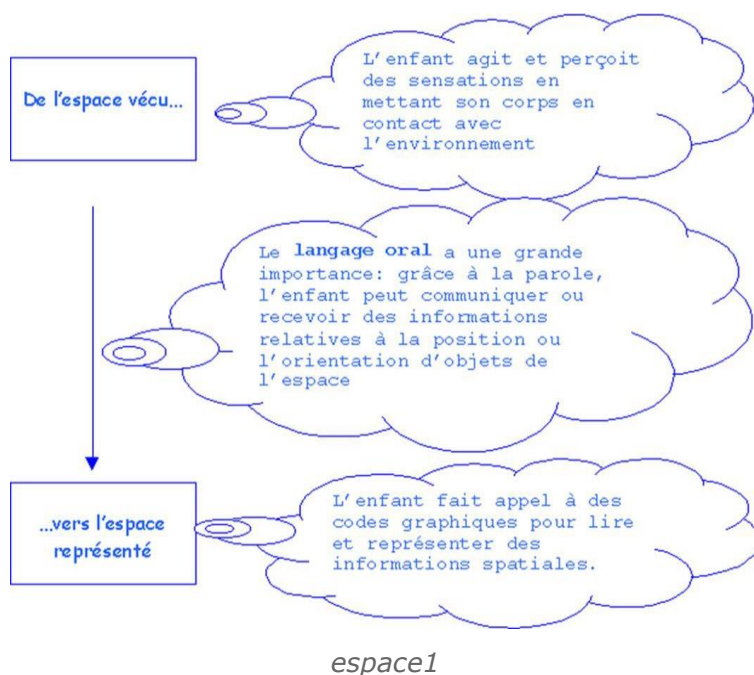
---

- Géométrie déductive
- "Est vrai ce que je démontre."
- Boîte à outils géométrique : **théorèmes**

## C. Géométrie et espace

### 1. D'un espace physique à un espace représenté

Un des enjeux principaux de l'étude de la géométrie à l'école est de permettre aux élèves de passer d'un espace physique à un espace représenté. Ce travail s'effectue tout au long de la scolarité et n'est pas linéaire.



#### Remarque

Si l'objectif est d'aller vers la représentation, il est nécessaire d'effectuer de nombreux allers-retours tout au long de la scolarité entre les représentations géométriques et l'espace physique (voir plus loin)

### 2. Différents espaces

On a l'habitude de distinguer trois espaces :

- Le **micro-espace** est celui que l'on peut toucher, et au milieu duquel il y a d'abord la feuille de papier sur laquelle on s'exprime par l'écriture et le dessin. C'est l'espace vécu.
- Le **méso-espace** est celui que l'on peut embrasser du regard. C'est l'espace perçu.
- Le **macro-espace** est le monde qu'on ne peut appréhender que mentalement par des représentations et des reconstructions intellectuelles. Le monde, le village, le quartier ... C'est l'espace conçu.

La géométrie usuelle est avant tout la géométrie du micro-espace, celui des objets que l'on peut représenter sur la feuille de papier.

### *Espaces et notions géométriques*

| Cycles  | Types d'espaces                                                | Savoir faire et notions géométriques                                                                                                                                                       |
|---------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cycle 1 | Micro-espace<br>Mésos-espace                                   | Reconnaissance de formes (lignes et surfaces).<br>Positions relatives d'objets de l'espace                                                                                                 |
| Cycle 2 | Micro-espace<br>Espace de la feuille de papier<br>Mésos-espace | Positions relatives d'objets de l'espace.<br>Lecture de plans<br>Mise en oeuvre de tracés avec des instruments.<br>Repérage sur quadrillage.<br>Reconnaissance de formes planes et solides |
| Cycle 3 | Espace de la feuille de papier<br>Mésos-espace<br>Macro-espace | Reconnaissance de formes planes et solides<br>Repérage dans le plan.<br>Description et construction de figures planes<br>Lecture et utilisation de cartes et de plans                      |

## **3. S'appuyer sur les espaces pour construire un savoir géométrique**

Pour plusieurs notions, notamment celles

- d'alignement
- de distance, de milieu
- d'orthogonalité, de parallélisme, d'angle droit
- de symétrie axiale...

des aller-retour entre des problèmes posés dans l'espace environnant et dans l'espace de la feuille de papier permettent de mieux prendre en charge le passage de la connaissance de l'espace à la géométrie.

### *Trois étapes de la construction du savoir géométrique*

- 1) Émergence des connaissances spatiales à partir de jeux, de manipulations, de résolution de problèmes spatiaux
- 2) Passage de ce qui est vécu dans le « méso-espace » à ce qui est représenté sur la feuille de papier, importance du langage
- 3) Étude instrumentée des relations géométriques dans le « micro-espace », mise en place du langage spécifique

### *Remarque*

Dans toutes ces étapes, la question du langage est fondamentale, pour faire formuler ce qui se passe dans chaque situation, favoriser la prise de conscience et faire émerger le vocabulaire spécifique.

## La géométrie à l'école

### A. La géométrie dans les programmes

#### 1. La géométrie en cycle 1

En cycle 1, le terme "géométrie" n'apparaît pas en tant que telle mais est implicite dans la construction des notions d'espace et de reconnaissance des formes et des grandeurs.

##### a) Découvrir les formes et les grandeurs

*Texte légal : Extrait des IO (BO 2008)*

---

#### **Découvrir les formes et les grandeurs**

En manipulant des objets variés, les enfants repèrent d'abord des propriétés simples (petit/grand ; lourd/léger). Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères, à comparer et à classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance.

##### *Reconnaissance des formes*

---

Les formes sont des propriétés des objets ou des espaces qui doivent être reconnues, construites ou tracées. La multiplication des expériences diverses, dans des espaces proches ou lointains, avec des objets petits ou grands, est nécessaire à l'enrichissement des observations qui préparent à la géométrie.

Parmi les activités quotidiennes, nombreuses sont celles qui conduisent l'enfant à manipuler des objets de formes et de dimensions variées.

L'examen de leurs caractéristiques permet très rapidement de se doter de catégories simples et, au début, dichotomiques (grand ou petit ...) permettant de les classer.

En enrichissant les observations et en multipliant les comparaisons, l'enseignant amène les enfants à mieux distinguer divers types de critères (forme, taille, masse, contenance...) et à se livrer à des classements, des rangements.

Par des jeux variés, on les conduit à élaborer des stratégies de dénomination ou de reconnaissance. L'approche par le toucher complète l'approche visuelle.

Ces jeux peuvent conduire à :

- la découverte des formes fermées ou ouvertes, des notions d'intérieur et d'extérieur ;
- la différenciation et la classification d'objets selon leur forme, en particulier :
  - en tenant compte des caractéristiques de leur contour : droit, courbe, plat, arrondi, ... ;
  - en mettant en jeu des dénombrements : nombre de sommets, de côtés, de faces, ... ;
- la reproduction d'assemblages de formes simples ;
- la comparaison d'objets selon leur taille, leur masse ou leur contenance.

### *Remarque*

Bien que la désignation de certaines formes soit introduite à cette occasion (en particulier : carré, triangle, rectangle, rond), l'objectif principal n'est pas l'apprentissage d'un vocabulaire mathématique.

### ***b) Se repérer dans l'espace***

*Texte légal : Extrait des IO (BO 2008)*

#### **Se repérer dans l'espace**

Tout au long de l'école maternelle, les enfants apprennent à se déplacer dans l'espace de l'école et dans son environnement immédiat. Ils parviennent à se situer par rapport à des objets ou à d'autres personnes, à situer des objets ou des personnes les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères, ce qui suppose une décentration pour adopter un autre point de vue que le sien propre. En fin d'école maternelle, ils distinguent leur gauche et leur droite.

Les enfants effectuent des itinéraires en fonction de consignes variées et en rendent compte (récits, représentations graphiques).

Les activités dans lesquelles il faut passer du plan horizontal au plan vertical ou inversement, et conserver les positions relatives des objets ou des éléments représentés, font l'objet d'une attention particulière. Elles préparent à l'orientation dans l'espace graphique. Le repérage dans l'espace d'une page ou d'une feuille de papier, sur une ligne orientée se fait en lien avec la lecture et l'écriture.

#### *Repérage dans l'espace*

Se repérer dans l'espace, se déplacer selon des consignes strictes, manipuler les indicateurs spatiaux du langage sont des activités qui s'ordonnent tout au long du cursus de l'école maternelle.

Elle doit permettre à l'enfant de donner du sens à ce repérage, en passant de son point de vue à celui de ses camarades au cours d'activités nombreuses et diverses, jouant sur les trajets et parcours, réels ou représentés, et incluant leur description verbale. Progressivement, il construira :

- une organisation de l'espace proche et lointain par rapport à celui qui parle (près de moi, à côté de moi, ici... s'opposant à loin de moi, là-bas...) ;
- une organisation des différentes dimensions de l'espace à partir de celui qui parle (dessus, dessous, au-dessus, au-dessous, à gauche, à droite) ;
- une organisation de l'espace par rapport à des objets ou à des repères extérieurs (près de la porte, au fond du couloir ...).

On utilisera les mêmes indicateurs, ou d'autres, pour repérer les objets dans un espace réel ou représenté.

### ***c) Compétences attendues en fin de cycle 1***

À la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de :

- reconnaître, nommer, décrire, comparer, ranger et classer des matières, des objets selon leurs qualités et leurs usages ;
- dessiner un rond, un carré, un triangle ;
- se situer dans l'espace et situer les objets par rapport à soi ;
- se repérer dans l'espace d'une page ;
- comprendre et utiliser à bon escient le vocabulaire du repérage et des relations dans l'espace.

## 2. La géométrie en cycle 2

La géométrie en cycle 2 reste liée à celle du cycle 1 mais introduit l'usage d'outils géométriques. Le premier palier du socle commun décrit les activités géométriques et les compétences fondamentales attendues.

*Texte légal : Extrait du socle commun*

---

L'élève est capable de :

- situer un objet par rapport à soi ou à un autre objet, donner sa position et décrire son déplacement ;
- reconnaître, nommer et décrire les figures planes et les solides usuels ;
- utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision un carré, un rectangle, un triangle rectangle ;
- être précis et soigneux dans les tracés, les mesures et les calculs ;

A l'école primaire, la géométrie renvoie à deux champs de connaissances :

- les connaissances spatiales qui permettent à chacun de contrôler ses rapports à l'espace environnant ;
- les connaissances géométriques qui permettent de résoudre des problèmes portant sur des objets situés dans l'espace physique ou dans l'espace graphique.

### Connaissances spatiales

La structuration de l'espace doit être développée tout au long de la scolarité. Elle doit retenir toute l'attention des enseignants du cycle 2 et constituer un objet de préoccupation permanente en liaison avec d'autres disciplines comme l'EPS ou la géographie.

Ces apprentissages ne s'effectuent pas spontanément. Ils nécessitent l'organisation d'activités se déroulant dans l'espace réel, mettant en liaison, le cas échéant, cet espace avec certaines de ses représentations (maquettes, photos, plans).

### Connaissances géométriques

Les connaissances géométriques travaillées au cycle 2 sont volontairement limitées et constituent une première approche de ce qui sera travaillé et structuré au cycle 3.

La simple observation d'objets ne suffit pas pour assurer une maîtrise correcte de ces connaissances. C'est en construisant des objets de nature géométrique et en résolvant des problèmes que l'élève sera progressivement amené à concevoir certaines propriétés, à les formuler et à les utiliser.

Au cycle 2, lors de la résolution de la plupart des problèmes de géométrie, les élèves vont d'abord prélever des propriétés

de façon perceptive, puis être amenés à utiliser les instruments de géométrie pour vérifier les hypothèses émises. Toutes les propriétés utilisées peuvent d'abord être perçues, avant d'être vérifiées à l'aide d'instruments.

Le vocabulaire géométrique est introduit et utilisé en situation, sans brider l'expression spontanée des élèves : les termes de la vie courante sont acceptés s'ils permettent une bonne communication ; puis, progressivement, ils sont remplacés par les termes spécifiques du langage

*Texte légal : Extrait des IO (BO 2008)*

---

Les élèves enrichissent leurs connaissances en matière d'**orientation et de repérage**. Ils apprennent à **reconnaître et à décrire** des **figures planes et des solides**. Ils utilisent des instruments et des techniques pour **reproduire ou tracer** des figures planes. Ils utilisent un **vocabulaire spécifique**.

*Extrait des IO (BO 2008) : Proposition de progression en cycle 2*

| Cours Préparatoire                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Cours élémentaire première année                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Situer un objet et utiliser le vocabulaire permettant de définir des positions (devant, derrière, à gauche de, à droite de...).</li><li>• Reconnaître et nommer un carré, un rectangle, un triangle.</li><li>• Reproduire des figures géométriques simples à l'aide d'instruments ou de techniques : règle, quadrillage, papier calque.</li><li>• Reconnaître et nommer le cube et le pavé droit.</li><li>• S'initier au vocabulaire géométrique.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Décrire, reproduire, tracer un carré, un rectangle, un triangle rectangle.</li><li>• Utiliser des instruments pour réaliser des tracés : règle, équerre ou gabarit de l'angle droit.</li><li>• Percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : alignement, angle droit, axe de symétrie, égalité de longueurs.</li><li>• Repérer des cases, des nœuds d'un quadrillage.</li><li>• Connaître et utiliser un vocabulaire géométrique élémentaire approprié.</li><li>• Reconnaître, décrire, nommer quelques solides droits : cube, pavé...</li></ul> |

### 3. La géométrie en cycle 3

En cycle 3, la géométrie quitte son aspect descriptif :

« L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure. »

*Texte légal : Extrait du socle commun*

L'élève est capable de :

- reconnaître, décrire et nommer les figures et solides usuels ;
- utiliser la règle, l'équerre et le compas pour vérifier la nature de figures planes usuelles et les construire avec soin et précision ;
- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas ;
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;

Les connaissances travaillées au cycle 3 prolongent celles qui ont été abordées au cycle 2. L'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de **passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés**. Il s'agit également de favoriser la mise en place d'images mentales pour les principaux concepts rencontrés, en permettant aux élèves de les identifier dans des configurations variées.

L'**argumentation** à propos des outils utilisés, des propriétés mobilisées et des résultats obtenus constitue une part importante du travail des élèves. Dans

cette perspective, quelques raisonnements peuvent être conduits, en particulier sur des figures dessinées à main levée.

Le travail spatial et géométrique s'organise autour de différents types de problèmes :

- localiser des objets ou des assemblages d'objets dans l'espace, se repérer et se déplacer dans l'espace, en utilisant des représentations de cet espace (maquettes, photos, plans, cartes) ;
- comparer, reproduire, décrire, construire, représenter des objets géométriques (figures planes, solides) ou des assemblages d'objets.

A travers ces activités, les élèves élaborent et utilisent les premiers concepts géométriques, en leur donnant du sens : *alignement, perpendicularité, parallélisme, longueurs, angles*.

**Ils prennent conscience de certaines propriétés des objets et ils acquièrent des éléments de vocabulaire** : face, arête, sommet ; côté, segment, milieu, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, angle ; ainsi que les noms de quelques solides et de quelques figures planes.

Enfin, ils développent des compétences techniques liées au maniement d'instruments de dessin : *règle et équerre (pour vérifier des alignements, tracer des droites perpendiculaires, des droites parallèles), compas (pour tracer des cercles ou des arcs de cercle, pour reporter des longueurs), gabarit (pour comparer ou reporter des angles), calque*.

**Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles.**

---

*Texte légal : Extrait des IO (BO 2008)*

---

L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.

**Les relations et propriétés géométriques** : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment.

**L'utilisation d'instruments et de techniques** : règle, équerre, compas, calque, papier quadrillé, papier pointé, pliage.

**Les figures planes** : le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle :

- description, reproduction, construction ;
- vocabulaire spécifique relatif à ces figures : côté, sommet, angle, diagonale, axe de symétrie, centre, rayon, diamètre ;
- agrandissement et réduction de figures planes, en lien avec la proportionnalité.

**Les solides usuels** : cube, pavé droit, cylindre, prismes droits, pyramide :

- reconnaissance de ces solides et étude de quelques patrons ;
- vocabulaire spécifique relatif à ces solides : sommet, arête, face.

Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé.

| CE2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | CM1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | CM2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Dans le plan</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle.</li> <li>Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre.</li> <li>Construire un cercle avec un compas.</li> <li>Utiliser en situation le vocabulaire : côté, sommet, angle, milieu.</li> <li>Reconnaître qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie, par pliage ou à l'aide du papier calque.</li> <li>Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.</li> </ul> <p>Dans l'espace</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconnaître, décrire et nommer : un cube, un pavé droit.</li> <li>Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet.</li> </ul> <p>Problèmes de reproduction, de construction</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reproduire des figures (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un modèle.</li> <li>Construire un carré ou un rectangle de dimensions données</li> </ul> <p>Décrire, reproduire, tracer un carré, un rectangle, un triangle rectangle</p> | <p>Dans le plan</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconnaître que des droites sont parallèles.</li> <li>Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre.</li> <li>Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas.</li> <li>Décrire une figure en vue de l'identifier parmi d'autres figures ou de la faire reproduire.</li> </ul> <p>Dans l'espace</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, prisme.</li> <li>Reconnaître ou compléter un patron de cube ou de pavé.</li> </ul> <p>Problèmes de reproduction, de construction</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Compléter une figure par symétrie axiale.</li> <li>Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes.</li> </ul> | <p>Dans le plan</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliser les instruments pour vérifier le parallélisme de deux droites (règle et équerre) et pour tracer des droites parallèles.</li> <li>Vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments.</li> <li>Construire une hauteur d'un triangle.</li> <li>Reproduire un triangle à l'aide d'instruments.</li> </ul> <p>Dans l'espace</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, cylindre, prisme.</li> <li>Reconnaître ou compléter un patron de solide droit.</li> </ul> <p>Problèmes de reproduction, de construction</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée (avec des indications relatives aux propriétés et aux dimensions).</li> </ul> |

## B. Les grands types d'activité géométrique à l'école

### 1. 5 grands types d'activités

Il est possible de classer les activités géométriques à partir de cinq verbes d'action :

- Reconnaître
- Décrire
- Reproduire
- Construire
- Transformer

### 2. Reconnaître

#### Fondamental

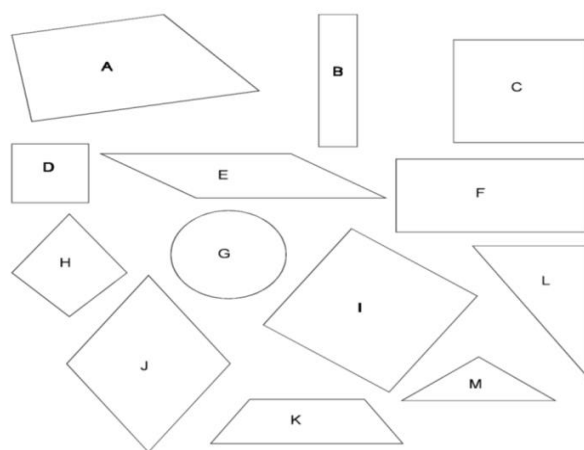
Reconnaître, c'est identifier les critères d'une figure donnée soit présentée seule soit intégrée à une figure complexe.

La reconnaissance d'une figure renvoie à la façon dont nous percevons les figures géométriques et plus généralement le monde qui nous entoure.

- l'analyse de chaque partie de la figure nécessite un effort qui n'a rien de naturel ;
- la reconnaissance d'une figure est directement liée aux connaissances stockées dans la mémoire à long terme sous forme de figures « prototypiques ». Toutefois, ces « prototypes » restent des figures particulières, ce qui expliquerait les difficultés de reconnaissance quand les figures ne sont pas dans leur position habituelle.

#### Exemple d'activité de reconnaissance au cycle 3

Voici des polygones.



Trouve en les nommant :

Les triangles : .....

Les carrés : .....

Les rectangles : .....

#### Définition : Figure prototypique

Les figures prototypiques sont les figures "modèles" intégrées dans la mémoire à long terme. Elles sont intégrées avec des positionnements et des dimensions spécifiques qui peuvent entraîner des difficultés de reconnaissance.

Exemple : la figure prototypique du carré est une figure dont les bords sont parallèles à la feuille. Cela peut amener une difficulté de reconnaissance de la figure quand celle-ci est présentée sur la pointe.

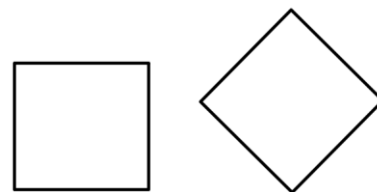


Image 1 carré

### 3. Décrire

#### Fondamental

Décrire un objet, c'est donner sous forme orale ou écrite des propriétés géométriques qui permettent de l'identifier.

On peut décrire un objet pour que d'autres puissent :

- le reconnaître parmi plusieurs,
- le construire sans l'avoir sous les yeux, uniquement en lisant ou en écoutant sa description.

#### Exemple d'activité de description : le jeu du portrait

Il s'agit par une description orale ou écrite de faire deviner la figure choisie. Cette activité est évolutive : au fur et à mesure de la scolarité, l'exigence vis à vis du vocabulaire géométrique s'affinera.

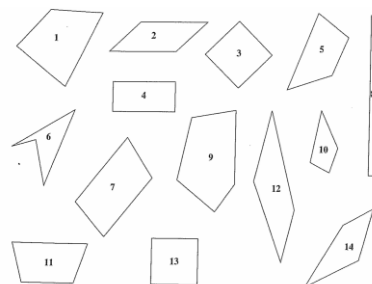


Image 2 décrire

### 4. Reproduire

#### Fondamental

Les élèves disposent d'un objet (dans le plan ou dans l'espace) et ils doivent en réaliser une copie.

Pour reproduire, les élèves peuvent utiliser plusieurs types d'outils que l'on peut autoriser ou interdire selon les connaissances géométriques qui sont en jeu : papier calque, papier quadrillé, gabarit, outils usuels de la géométrie : règle graduée ou non, compas, équerre...

#### L'élève peut valider son travail en comparant la reproduction au modèle.

Le travail de reproduction peut permettre :

- Le réinvestissement de certaines connaissances géométriques et on utilise alors comme modèle des objets que les élèves ont déjà étudiés;

-L'introduction de nouvelles connaissances : l'apprentissage se fait alors en situation.

**Pour reproduire un objet, les élèves peuvent utiliser des propriétés de manière implicite. L'enseignant devra donc les aider à les expliciter.**

Dans l'organisation de la classe, on peut envisager une succession de phase :

- observation de l'objet à reproduire
- description succincte de la tâche
- reproduction
- comparaison avec le modèle
- synthèse de ce que l'on a appris au cours de l'activité.

*Exemple d'activité de description en cycle 2 : le sol des maisons*

---

Situation: Donner aux élèves des maisons "carrées" auxquelles il manque le plancher.

Il faut construire le plancher avec le matériel mis à disposition.



*Image 3 maisons*

## 5. Construire

*Fondamental*

---

Contrairement à la reproduction, quand on construit un objet, on ne dispose pas du modèle de cet objet. On construit à partir d'une description ou d'une représentation de l'objet.

*Exemple d'activité de construction en cycle 3 : suivre un programme de construction*

---

Sur une feuille blanche, réalise la construction ci-dessous.

- 1°) Trace un cercle de centre A et de rayon 5 cm.
- 2°) Place un point B sur ce cercle.
- 3°) Trace (AB).
- 4°) Sur [AB], place un point C à 4 cm de A.
- 5°) Trace un cercle de centre C et de rayon 4 cm.

*construire*

*Complément*

---

L'activité de construction ne passe pas forcément par une consigne écrite ni par l'utilisation d'outils géométrique.

## 6. Transformer

### Fondamental

---

On transforme une figure donnée selon des critères précis:

- agrandissement, réduction
- symétrie

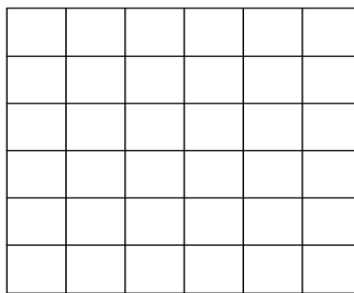
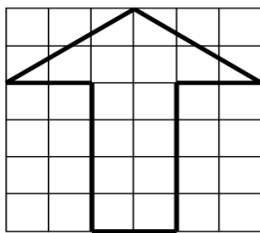
-...

Certaines propriétés géométriques restent invariantes par ces transformations, d'autres au contraire ne sont pas conservées.

La transformation peut être facilitée ou complexifiée par les types de supports ou les outils disponibles. Ce sont des *variables didactiques* (cf. **La question des variables didactiques**).

### Exemple d'activité de transformation en cycle 2 : un agrandissement

---



## C. Les problèmes géométriques à l'école

### 1. Une proposition de typologie

Les problèmes en géométrie peuvent être classés selon leur place dans les apprentissages:

#### - situation problème :

le problème proposé permet de construire un apprentissage en surmontant les représentations préalables des élèves.

#### - problème ouvert ou problème de recherche :

Il s'agit d'un problème où les élèves n'ont pas la connaissance technique pour réaliser celui-ci. Ce type de problème permet de favoriser la méthodologie et la recherche

#### - problème d'application, de réinvestissement :

Dans ce cas le problème permet à l'élève d'automatiser une nouvelle connaissance, de l'appréhender.

#### - problèmes complexes, problèmes de synthèse, tâches complexes :

Souvent proposés de façon distanciée, les problèmes complexes ne nécessitent pas de nouvelles connaissances mais nécessitent de mobiliser plusieurs connaissances acquises antérieurement.

### Remarque

---

La typologie de problème sera abordée de façon plus détaillée dans un module à venir, toutefois cette classification peut être transposée aux autres domaines mathématiques.

## Quelques éléments d'analyse

### *A. Les principales difficultés des élèves*

#### **1. Difficultés liées aux connaissances spatiales**

Les connaissances spatiales sont très étroitement liées à la structuration de l'espace par l'enfant.

- les connaissances spatiales des élèves se forment de manière progressive et certaines connaissances ne seront pas toujours disponibles à certains âges ;
- la construction des connaissances spatio-géométriques se fait par la capacité à l'élève à avoir des représentations mentales riches, c'est à dire non limitées par un seul modèle.

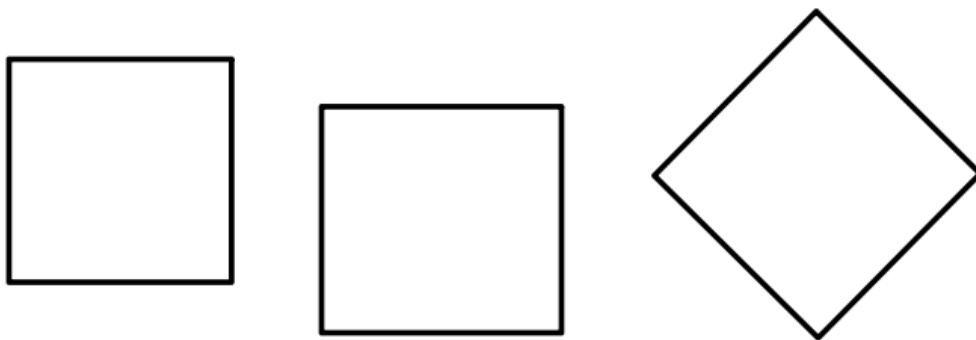
Deux types d'obstacles peuvent apparaître :

- le nombre insuffisant d'expériences que peut vivre l'élève ;
- le fait que l'élève vive essentiellement dans un monde de représentation, sans entrer dans une conceptualisation de l'objet géométrique.

#### *Exemple*

---

*ex: Quels quadrilatères sont des carrés ?*



*Carrés ?*

De nombreux élèves ne reconnaissent pas le troisième dessin comme la représentation d'un carré, celui-ci n'étant pas en représentation prototypique est reconnu comme losange (ce qu'il est aussi au demeurant).

## 2. Difficultés liées aux représentations des objets géométriques

Les élèves peuvent avoir du mal à faire la distinction entre l'objet géométrique et sa représentation. Cela peut être dû à une représentation forcément imparfaite pour figurer les caractéristiques de l'objet. Par exemple : comment figurer sur la feuille le prolongement infini d'une droite ? De la même façon, il y a une difficulté importante à appréhender une courbe ou une droite comme un ensemble de points.

### *Exemple : Exemple 1*

**Les élèves ont des difficultés à prendre conscience que le tracé géométrique (qui est un trait continu) est un ensemble de points.**

Par exemple, si on demande à des enfants de placer tous les points situés à 3 cm d'un point O donné, ils placent une dizaine de points et déclarent ensuite que ce n'est pas possible de tous les tracer. Ils ne voient pas le lien entre cet ensemble de points et le cercle de centre O et de rayon 3 cm.

### *Exemple : Exemple 2*

**Les élèves ont du mal à faire la distinction entre la représentation d'une droite et celle d'un segment.**



Exemple : Le point A est-il un point de la droite (D) ?

Réponse de l'élève : Non

*Image 4 droite ?*

L'élève voit que le point n'est pas sur la représentation de la droite, il en déduit qu'il n'appartient pas à la droite. Réussir cet exercice suppose que l'élève s'autorise à prolonger la représentation de la droite et pense que le dessin obtenu est toujours une représentation de cette droite : c'est donc la conception de la notion de « droite » qui est en cause.

## 3. Difficultés liées aux tâches de reproduction, représentation et construction de figures géométriques

Pour réaliser ces tâches l'élève doit passer par un certain nombre d'étapes. Pour certaines de ces étapes, l'élève peut être confronté à des difficultés.

### *1) Repérage des figures de base d'une figure complexe*

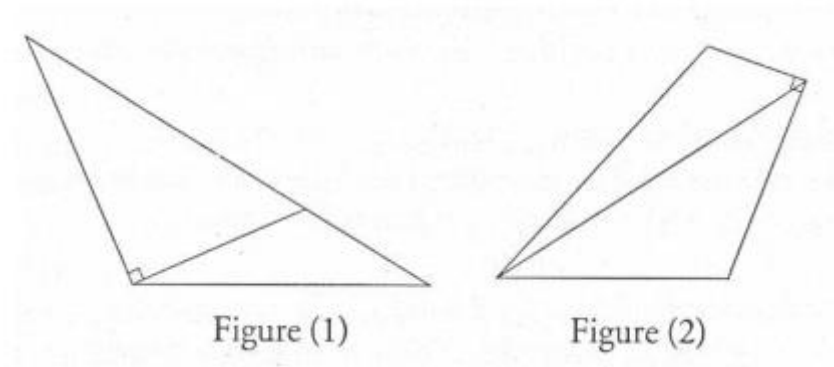
L'élève peut ne pas arriver à repérer les figures de base ou en oublier.

Les origines de cette difficulté sont multiples :

- l'élève n'a pas stocké de figures prototypiques correspondant aux figures à repérer, par manque d'expérience ;
- les figures de base ne correspondent pas aux caractéristiques des figures prototypiques : l'élève ne reconnaît pas des perpendiculaires parce que les droites ne sont pas « horizontales » et « verticales » ou bien l'élève ne reconnaît pas un rectangle parce qu'il est très allongé,...
- des figures de base trop prégnantes empêchent l'élève d'en voir d'autres ;
- l'élève a du mal à isoler les figures de base des autres éléments de la figure.

### Exemple

Le repérage de l'angle droit est plus complexe dans la figure 2, il est plus difficile à mettre en évidence car partagé par une diagonale. De plus la figure du triangle rectangle est mise en avant dans la figure 1.



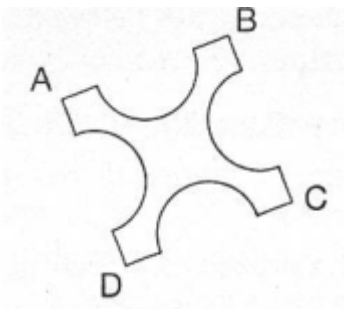
angles

### 2) Repérage de sur-figures

L'élève ne repère pas les figures qui ne sont pas totalement tracées, en particulier les sur-figures. Ce sont des figures dont certains éléments ne sont pas tracés et qui englobent des figures de base.

### Exemple

Par exemple, le carré ABCD est une sur-figure :



surfigure

### 3) Etablissement d'une chronologie des tracés

Pour certaines figures, établir une chronologie est sans importance. Ce n'est évidemment pas toujours le cas. L'établissement de cette chronologie suppose de construire mentalement au moins une partie de la figure.

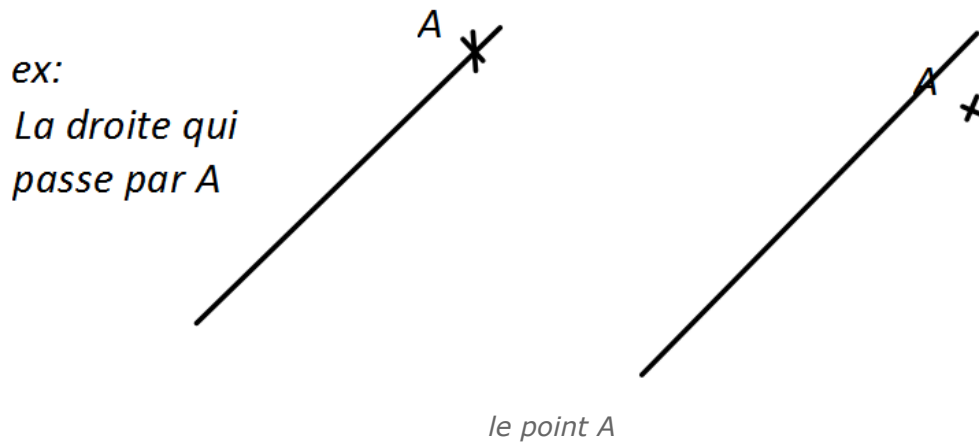
### 4) Exécution des tracés géométriques

Pour cette dernière tâche les origines des difficultés sont nombreuses :

- difficulté de manipulation des instruments de tracé ;
- non connaissance des propriétés des figures à tracer ;
- conception incomplète d'un instrument : par exemple pour beaucoup d'élèves un compas sert à tracer des cercles mais non à reporter des longueurs (voir la séance filmée pour remédier à cette difficulté)
- confusion sur les représentations des éléments

### Exemple

un exemple de confusion entre les symboles de représentation du point lors d'un tracé.



## 4. Difficultés liées aux descriptions de figures

En plus des difficultés déjà citées, peuvent apparaître des difficultés liées à la communication des instructions. Elles peuvent se situer à plusieurs niveaux :

- **Au niveau du vocabulaire :**

- l'élève ne connaît pas certains mots mathématiques, ce qui l'oblige à des paraphrases longues et imprécises ;
- l'élève confond certains mots (par exemple « perpendiculaire » et « parallèle ») ;
- l'élève utilise certains mots mathématiques avec leur sens courant

*(par exemple il parle du « milieu » d'un cercle) ou utilise certains mots du langage courant qui n'ont pas de sens en mathématique (« rond », « trait », ...).*

- **Au niveau de la connaissance des propriétés** qui caractérisent les figures de base des objets à décrire :

si l'élève ne connaît pas ces propriétés, il ne pourra pas décrire correctement ces figures.

- **Au niveau de l'effort de décentration** qu'oblige toute description :

il faut se mettre à la place de l'autre. Cette difficulté entraîne la présence d'implicite dans les descriptions.

*Par exemple, l'élève parlera du côté du triangle ABC sans préciser duquel il s'agit.*

- **Au niveau du codage de figures :**

beaucoup d'élèves pensent qu'ils n'ont pas le droit de transformer un dessin proposé par le maître (par exemple, rajouter des lettres).

## 5. En complément : difficultés particulières associées à la symétrie axiale

### *Difficultés concernant la reconnaissance ou le tracé d'axes de symétrie*

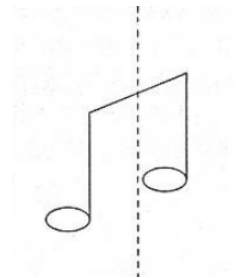
En plus des difficultés déjà évoquées, d'autres difficultés plus spécifiques se superposent

- **Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique.** Ce manque d'anticipation empêche l'observation d'axes présents ou la possibilité d'en tracer

- **Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève : « un axe de symétrie d'une figure passe par le milieu de cette figure ».**

Le mot « milieu » utilisé par les élèves peut aussi bien signifier le milieu d'un segment, le centre d'un cercle, d'un parallélogramme ...

Pour les élèves, le « milieu » est un point d'équilibre ou une ligne d'équilibre, ce qui entraîne des choix d'axes erronés.



- **Les élèves privilégient les axes verticaux ou horizontaux**, dans la mesure où ils le sont dans leur contexte social et scolaire.

Ceci a plusieurs conséquences.

- Dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repéreront que l'axe horizontal ou vertical s'il existe
- Si une figure qui admet un (ou des) axe(s) de symétrie est représentée de telle sorte que cet (ou ces) axe(s) ne soit (soient) ni horizontal (aux), ni vertical(aux), beaucoup d'élèves estimeront que la figure n'admet pas d'axe.

Par exemple, nombreux sont les élèves qui ne voient pas les axes de symétrie de la figure (1) alors qu'ils les perçoivent pour la figure (2).

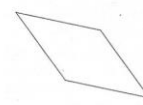


Figure (1)



Figure (2)

### *Difficultés concernant le tracé du symétrique d'une figure par rapport à un axe*

#### **Tracé du symétrique d'une figure à main levée**

L'élève doit donc mobiliser des images mentales pour pouvoir placer soit les points clés de la figure (sommets ou centres des arcs de cercle), soit la figure globale. De plus, celui-ci doit tracer les éléments de cette figure. Dans le cas où ce tracé n'est pas parfaitement automatisé, l'élève

peut perdre le contrôle de son image mentale (surcharge cognitive).

#### **Tracé du symétrique d'une figure avec une équerre et une règle**

On peut penser que la seule difficulté ici consiste à tracer le symétrique des points clés de la figure, car une fois cette construction faite l'élève

n'a plus qu'à joindre les points correspondants. L'élève peut pourtant encore rencontrer des difficultés pour joindre les points, ou effectuer des tracés erronés, notamment en partant d'un point correctement transformé puis en poursuivant le tracé sous forme de translation (une reproduction "calque" plutôt qu'une représentation miroir")

## **B. Variables didactiques**

### **1. La question des variables didactiques**

*Définition : Variable didactique*

**Une variable didactique est une donnée du problème** (la taille d'un ou de plusieurs nombres, la place d'un nombre par rapport à 1, la place dans la feuille de papier de l'axe de la symétrie, etc.) **ou un élément de consigne** (autorisation ou non d'utiliser une calculatrice, tel ou tel instrument pour tracer : règle, équerre, compas, etc., ou pour mesurer : double décimètre, rapporteur, etc.) **dont la variation va provoquer une modification dans le choix des procédures de résolution employées par les élèves.**

Par exemple, dans un exercice d'agrandissement d'une figure, on voit bien que le choix du coefficient 2 permet à l'élève d'engager des procédures qui ne seront plus utilisables avec un coefficient égal à 1,75.

De même, en géométrie, dans le cadre de la symétrie, proposer la réalisation du symétrique d'une figure sur un papier quadrillé, n'implique pas la même procédure que sur papier uni.

L'emploi judicieux d'une variable didactique pourra par exemple, permettre de confronter d'abord les élèves à une variante du problème dont ils pourront se saisir et qui soit facile à résoudre à l'aide de leurs connaissances antérieures, puis dans un second temps de les confronter à une variante qui soit aussi facile à saisir mais dont la résolution sera pour eux véritablement problématique.

---

#### *Les variables didactiques en géométrie*

---

Les variables didactiques sont nombreuses. Les principales sont :

- **la taille de l'espace** ;
- **le support** : papier blanc ou papier quadrillé ;
- **les instruments disponibles** : calque, gabarit, règles non graduée ou graduée, équerre, compas... ;
- **la spécificité des objets à construire ou représenter** :
  - taille,
  - complexité de la figure (nombre de figures de bases associées, nature de ces figures),
  - orientation (standard ou non),
  - la chronologie des tracés (intervient-elle ou non ?),
  - présence de sur-figure ou non... ;
- **la proximité de la figure à reproduire** (possibilité de s'informer à chaque étape de la reproduction si la figure est disponible ou au préalable si la figure est éloignée) ;
- **la complexité de la consigne** : présence de vocabulaire géométrique complexe, précision, présence de l'implicite, le nombre d'information ...